13 МЕТОД СТРЕЛЬБЫ (БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД)

Это численный метод, заключающийся в сведении краевой задачи к некоторой задаче Коши для той же системы дифференциальных уравнений.

Пример:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u,v), & a \le x \le b \\ v'(x) = g(x,u,v) \end{cases} \tag{109}$$

$$\begin{cases} \varphi(u(a),v(a)) = 0 \\ \psi(u(b),v(b)) = 0 \end{cases} \tag{110}$$

Выберем произвольно значение $u(a) = \eta$, рассмотрим левое краевое условие как алгебраическое уравнение $\varphi(\eta, v(a)) = 0$ и определим удовлетворяющее ему значение $v(a) = \varsigma(\eta)$. Возьмем значения $u(a) = \eta,\ v(a) = \varsigma$ в качестве начальных условий задачи Коши для системы (109) и проинтегрируем эту задачу Коши любым численным методом, например, методом Рунге-Кутта. При этом получим решение $u(x;\eta),\ v(x;\eta)$, зависящее от η, как от параметра.

Значение ς выбрано так, что найденное решение удовлетворяет левому краевому условию (110). Однако правому краевому условию это решение, вообще говоря, не удовлетворяет: при его подстановке левая часть правого краевого условия, рассматриваемая как некоторая функция параметра η:

$$\overline{\psi}(\eta) = \psi(u(b;\eta), v(b;\eta)), \tag{111}$$

не обратится в нуль. Надо каким-либо способом менять параметр η, пока не подберем такое значение, для которого $\overline{\psi}(\eta) \approx 0$ с требуемой точностью. Таким образом, решение краевой задачи (109)-(110) сводится к нахождению корня одного алгебраического уравнения

$$\overline{\psi}(\eta) = 0. \tag{112}$$

Для решения задачи (112) можно применять метод дихотомии, метод Ньютона или метод секущих.

Метод стрельбы прост, применим как к линейным, так и к нелинейным задачам и позволяет использовать при численном интегрировании схемы

Рунге-Кутта (или другие) высокого порядка точности. К большинству задач типа (109)-(110) он применяется успешно.

Пример.

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' = 1 \\ y(1) = 0, \quad y(1.4) = \frac{1}{2}\ln^2(1.4) = 0.0566 \end{cases}$$

Сведем уравнение 2-го порядка к системе двух уравнений 1-го порядка с помощь замены: $y(x) = u(x), \quad y'(x) = v(x)$.

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = \dfrac{1 - x \cdot v(x)}{x^2} \\ u(1) = 0, \quad u(1.4) - 0.0566 = 0 \end{cases} \tag{113}$$

Вместо краевой задачи (113) решаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = \dfrac{1 - x \cdot v(x)}{x^2} \\ u(1) = 0, \quad v(1) = \beta \end{cases} \tag{114}$$

Где β будем подбирать так, чтобы в конце концов выполнилось условие u(1,4)-0,0566=0.

Решаем систему (114) методом Рунге-Кутта 2-го порядка с шагом h=0.1.

$$\begin{cases} u^0 = u(1) = 0 \\ v^0 = v(1) = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + 0.5hv^n \\ v^{n+\frac{1}{2}} = v^n + 0.5h\dfrac{1 - x_n v^n}{x_n^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + hv^{n+\frac{1}{2}} \\ v^{n+1} = v^n + h\dfrac{1 - (x_n + 0.5h)v^{n+\frac{1}{2}}}{(x_n + 0.5h)^2} \end{cases}$$

Организуем вычисления в таблицах Excel.

Для случая $\beta = 1$

xn	un	vn	un+1/2	vn+1/2
1	0	1	0,05	1
1,1	0,1	0,995465	0,149773	0,991539
1,2	0,199154	0,984858	0,248397	0,978545
1,3	0,297008	0,970575	0,345537	0,962831
1,4	0,393291	0,954124		
u(1.4)-0,0566=	0,336691			

видим, u(1,4)-0,0566=0,33691.

Для случая $\beta = -0{,}5$:

xn	un	vn	un+1/2	vn+1/2
1	0	-0,5	-0,025	-0,425
1,1	-0,0425	-0,36882	-0,06094	-0,31073
1,2	-0,07357	-0,26619	-0,08688	-0,22037
1,3	-0,09561	-0,18456	-0,10484	-0,14787
1,4	-0,1104	-0,11873		
u(1.4)-0,0566=	-0,167			

видим, u(1,4)-0,0566= -0,167.

Т.е. на отрезке [-0,5;1] существует такое значение β, которое, будучи подставленное в (114), приведет к тому, что u(1,4)-0,0566=0. Найти это значение можно методом деления отрезка пополам.

13.1 Метод Галеркина

Пусть дано уравнение с некоторыми краевыми условиями (для определенности — первого рода)

$$A(u(x)) = f(x), \quad a \le x \le b, \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{115}$$

будем искать приближенное решение в виде суммы

$$u(x) \approx y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{116}$$

где $\varphi_0(x)$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (115), а $\varphi_k(x),\ \ 1 \le k < \infty$ — какая-то система линейно-независимых функций, полная в классе непрерывных функций, определенных на отрезке [a,b] и обращающихся в нуль на его концах.

Для определения коэффициентов c_k потребуем выполнения следующей системы линейных алгебраических уравнений.

$$\int_a^b [A(y_n(x)) - f(x)]\varphi_k(x)dx = 0, \quad 1 \le k \le n \tag{117}$$

Найдя из нее коэффициенты c_k, получим приближенное решение (116).

Поясним, откуда появляются система (117). Оказывается, если для некоторой функции $F(x)$ и полной системы функций $\varphi_k(x),\ \ 1 \le k < \infty$ выполняется соотношение $\int_a^b F(x)\varphi_k(x)dx = 0, \quad \forall\, 1 \le k < \infty$ то $F(x) \equiv 0$ на [a,b].

Таким образом, если бы мы нашли такую функцию $u(x)$, чтобы $A(u(x)) - f(x)$ было ортогонально $\varphi_k(x),\ \ 1 \le k < \infty$, то это означало бы, что $A(u(x)) = f(x)$ и задача (115) была бы решена точно. Мы же в равенствах (117) требуем ортогональность только при $k \le n$, следовательно $A(u(x)) \approx f(x)$

Пример.

$$\begin{aligned} &u''(x) + u(x) = -x \\ &u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{aligned} \tag{118}$$

Решение.

Положим $\varphi_0(x) = 0$ и выберем полную систему функций $\varphi_k(x) = x^k(\frac{\pi}{2} - x), \quad 1 \le k < \infty$.

Если ограничиться одним членом в (116), т.е.

$u(x) \approx y_1(x) = c_1\varphi_1(x) = c_1 x(\frac{\pi}{2} - x)$, то для нахождения c_1 получим уравнение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y_1''(x)+y_1(x))-(-x)]\varphi_1(x)dx=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(-2c_1+c_1x(\frac{\pi}{2}-x))+x]x(\frac{\pi}{2}-x)dx=0$$

$$c_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-2+x(\frac{\pi}{2}-x)]x(\frac{\pi}{2}-x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\frac{\pi}{2}-x)dx=0$$

$c_1 \approx 0{,}521$

Если в (26) возьмем два члена суммы, т.е $u(x) \approx y_2(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1x(\frac{\pi}{2}-x) + c_2x^2(\frac{\pi}{2}-x)$, то получим два уравнения относительно двух неизвестных c_1 и c_2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y_2''(x)+y_2(x))-(-x)]\varphi_1(x)dx=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y_2''(x)+y_2(x))-(-x)]\varphi_2(x)dx=0$$

$c_1 \approx 0{,}815$

$c_2 \approx 0{,}377$

.

Метод Галеркина при небольшом числе членов дает плохие результаты. Обратим внимание на то, что при увеличении n не только добавляются новые коэффициенты, но и меняются старые, что не очень удобно. Однако, если задача линейная, а система $\varphi_k(x)$ ортогональная, то уже найденные c_k не будут меняться при увеличении n.

Метод Галеркина для нелинейных задач используют лишь для нахождения грубого приближения; для линейных же задач им можно найти решение с хорошей точностью. Кроме этого, результат очень чувствителен к тому, насколько удачно выбрана система функций $\varphi_k(x)$ для данной задачи.